Varianta 86

SUBIECTUL I

a) Dacă N este mijlocul segmentului (AB) atunci $N\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, deci N=M. De unde rezultă că M este mijlocul segmentului (AB).

b) $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 2\sqrt{3}$ şi $AC = 2\sqrt{3}$ de unde rezultă că ΔABC este echilateral.

c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ punctele O, M, C sunt coliniare.

d) $R = 2$.

e) $\frac{\sin^2 30^\circ}{\cos^2 60^0} = 1$.

f) $\operatorname{Re} z = 1$.

SUBIECTUL II

1.

a) $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=40$.

b) $x = 2$.

c) $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

d) $C_4^1 - C_4^2 + C_4^3 = 2$

e) $z = \pm 2i$.

2.

a) $f(0) = 1$.

b) $f'(x) = e^x + 12x^2$.

c) Deoarece $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$ atunci f este crescătoare pe **R.**

d) $\int_0^1 f(x)dx = e$.

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(-x)}{x^3} = -4$.

SUBIECTUL III

a) $I_2 + A = B$.

b) $A^2 = A$.

c) det(B)=3·0-2·(-1)=2.

d) $\det(B - x\cdot I_2) = x^2 - 3x + 2$. Ecuația devine $x^2 - 3x + 2 = 0$ cu soluțiile 1 şi 2.

e) $f(A) = A^2 - A \overset{b)}{=} O_2$. Iar $f(B) = B^2 - B = 2A$.

f) Fie $P(n): B^n = I_2 + (2^n - 1)A$, n∈**N***.

$P(1): B = I_2 + A$, (A).

Presupunem $P(k)$ (A) şi demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 1$.

$P(k): B^k = I_2 + (2^k - 1)A$, iar $P(k+1): B^{k+1} = I_2 + (2^{k+1} - 1)A$.

$B^{k+1} = B^k \cdot B = [I_2 + (2^k - 1)A](I_2 + A) =$

$= I_2 + A + (2^k - 1)A + (2^k - 1)A = I_2 + (2^{k+1} - 1)A$.

De unde $P(n)$ este (A) ∀n∈**N*.**

g) Deoarece $\det(B^k) = (\det B)^k = 2^k$ suma devine

$$2 + 2^2 + ... + 2^{100} = 2\frac{2^{100} - 1}{2 - 1} = 2^{101} - 2.$$

SUBIECTUL IV

a) $f(2) - f(1) = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3$.

b) $f'(x) = \left(\ln(x^2 + x)\right)' = \dfrac{2x + 1}{(x^2 + x)}$.

c) $f'(x) > 0, \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe (0,∞).

d) Calculăm $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x^2 + x) = \ln(0_+) = -\infty$; $\Rightarrow x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f.

e) $\lim\limits_{x\to\infty} xf'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + x}{x^2 + x} = 2$.

f) Deoarece $f(x) - f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln x^3 = 3\ln x$ atunci:

$$\int_1^{e^2} \left(f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx = 3x\ln x\Big|_1^{e^2} - 3\int_1^{e^2} x\cdot\frac{1}{x}\,dx = 3(e^2 + 1)..$$

g) $f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + ... + f(2n-1) - f(2n) =$

$\ln(1\cdot 2) - \ln(2\cdot 3) + \ln(3\cdot 4) - \ln(4\cdot 5) + ... + \ln[(2n-1)2n] - \ln[2n(2n+1)] =$

$\ln\left(\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot(2n-1)2n}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot ...2n(2n+1)}\right) = \ln\dfrac{1}{2n+1}$ de unde:

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + ... + f(2n-1) - f(2n)\right) = \ln 0_+ = -\infty.$$